Wachstumsformen

Betrachtung am Beispiel
Wachstum eines Kaninchenbestands

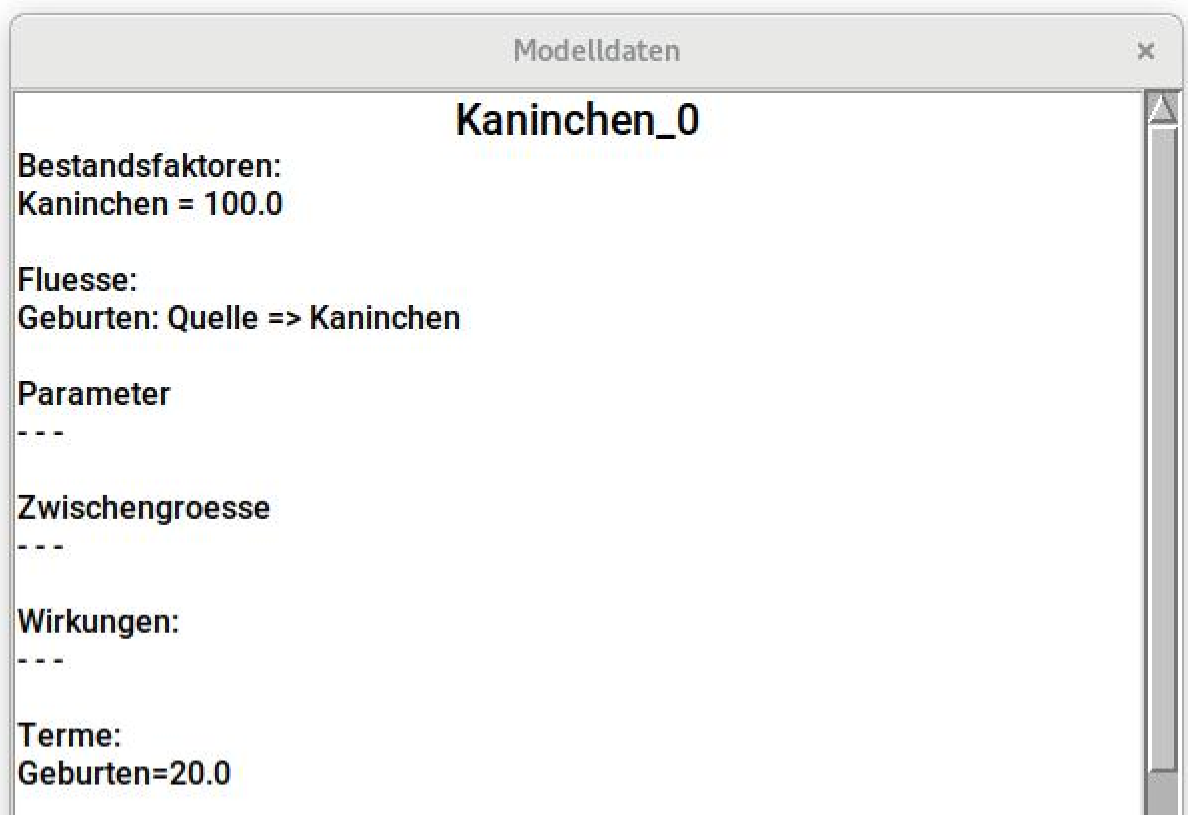
Wachstumsformen

Wachstum eines Kaninchenbestands

- Erste Modellannahme:
- Am Beginn sind 100 Kaninchen vorhanden.
- Die Zahl der Kaninchen nimmt in jedem Zeitabschnitt um 20 zu.

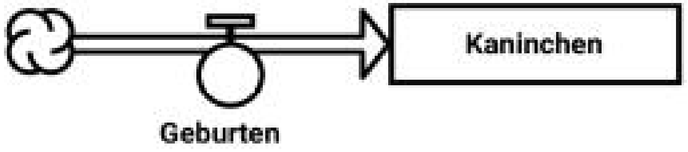
Wachstum eines Kaninchenbestands

- Erste Modellannahme



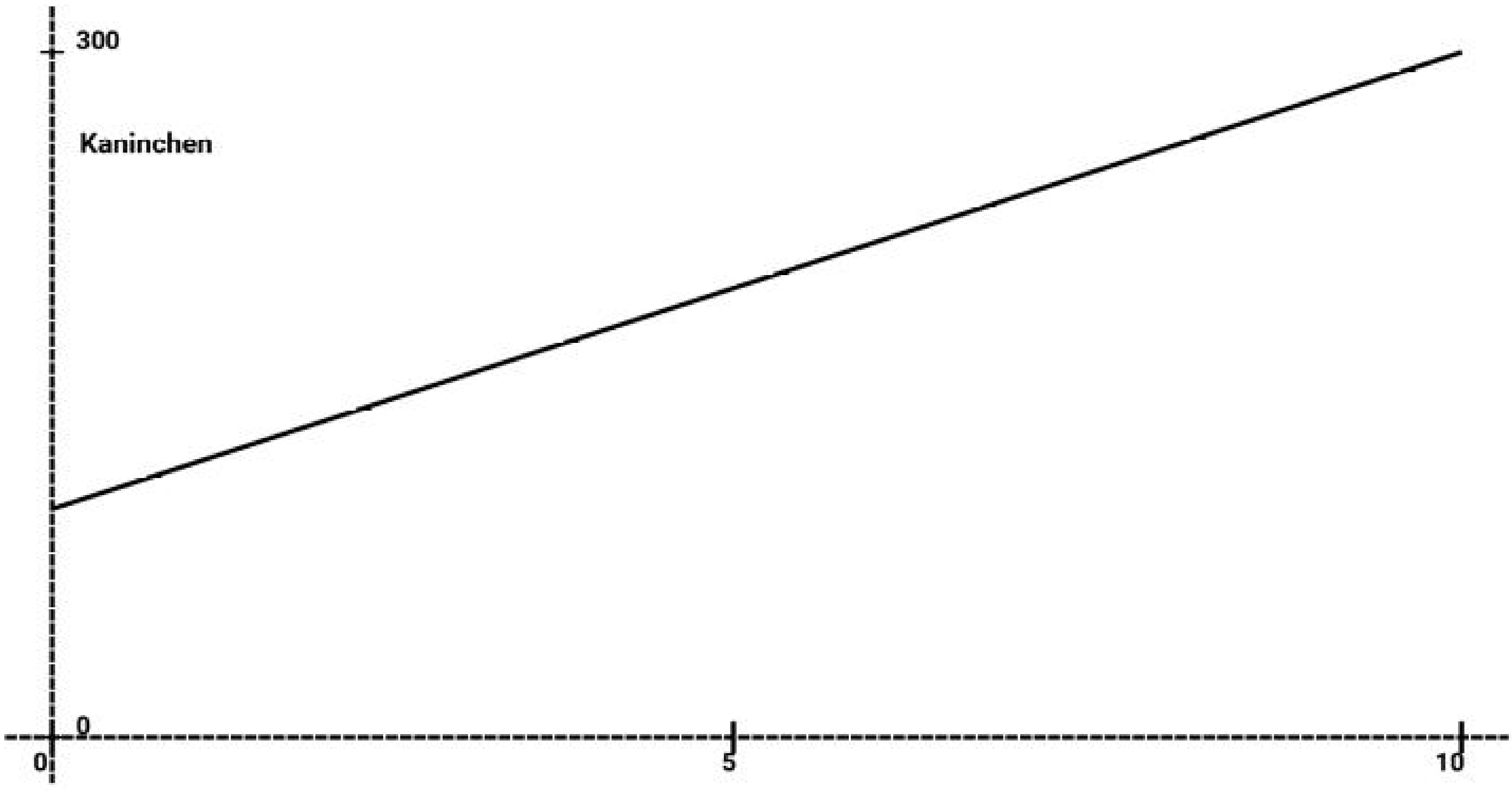
Wachstumsformen

Modelldiagramm



Wachstumsformen

Lineares Wachstum



Wachstumsformen

Differentialgleichung mathematische Grundlage für *Dynamische Systeme*

- *"gewöhnliche Differentialgleichungen"* enthalten nur Ableitungen nach genau einer Variablen
- *Anfangswertproblem*
  f'(t) = <Funktionsterm von t>
  f(0) = <der Anfangswert>

"Nicht alle Differentialgleichungen von Modellen sind analytisch lösbar. Jedoch kann häufig mittels der numerischen Mathematik eine gute Annäherung an die analytische Funktion erreicht werden."
[Quelle: wikipedia]

Wachstumsformen

Lineares Wachstum mathematisch

- Differentialgleichung

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = 20 \quad mit \quad f(0)=100$$

- Lösung

$$f(t) = 20 \cdot t + 100$$

Wachstumsformen

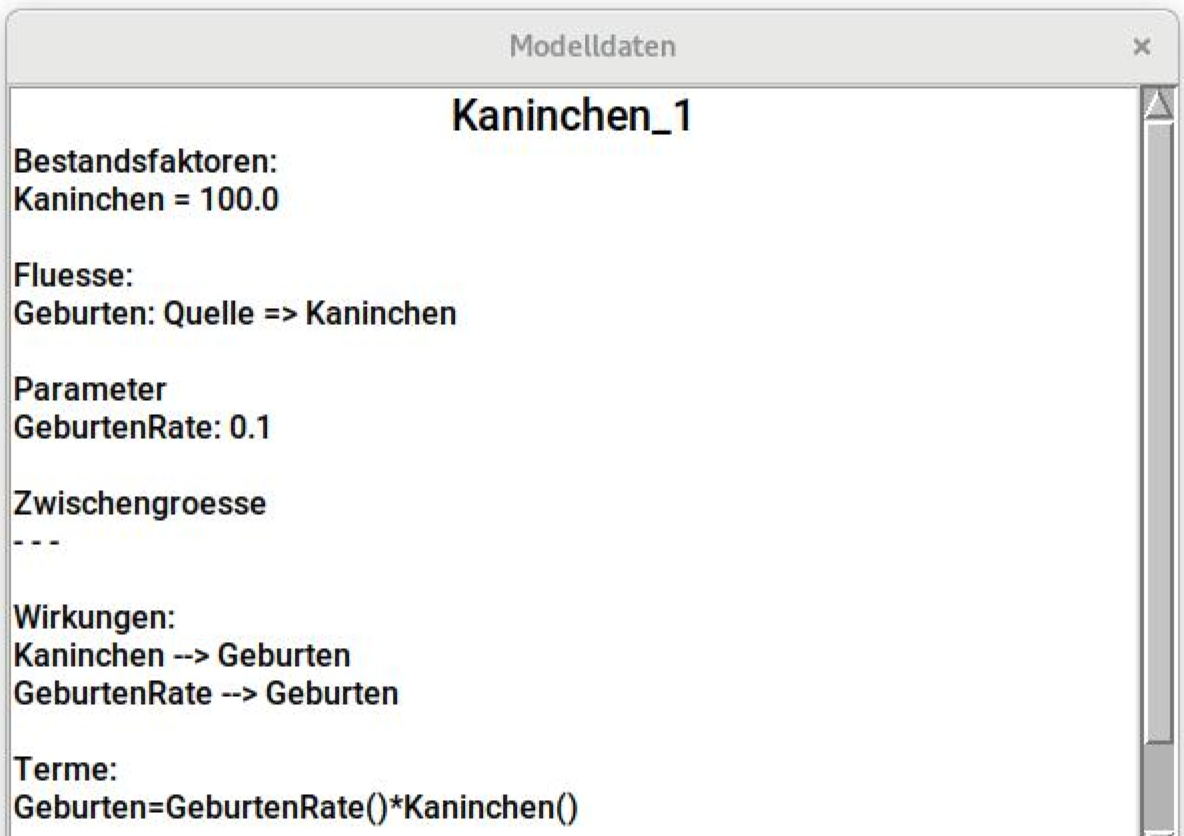
Wachstum eines Kaninchenbestands

- Zweite Modellannahme:
- Am Beginn sind 100 Kaninchen vorhanden.
- Die Zahl der Kaninchen nimmt in jedem Zeitabschnitt um 10% zu.

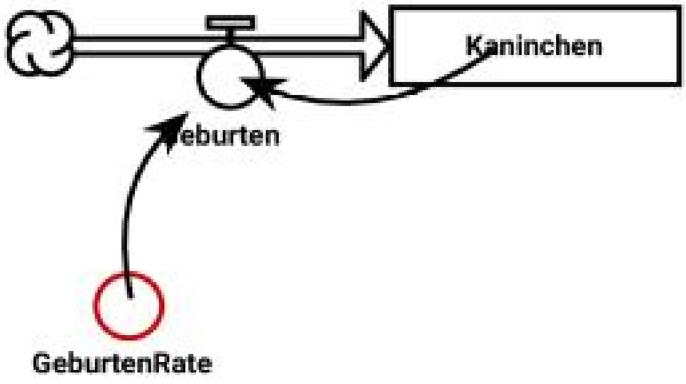
Wachstumsformen

Wachstum eines Kaninchenbestands

- Zweite Modellannahme

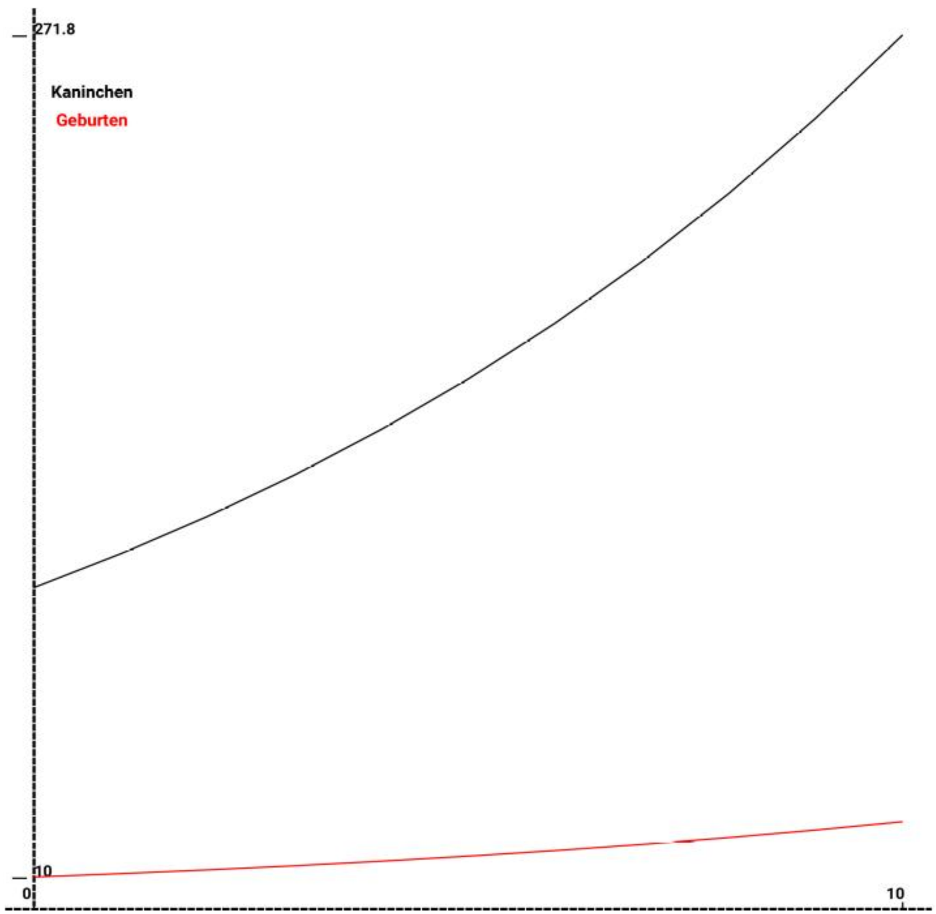


Modelldiagramm Pythonprojekt



Wachstumsformen

Exponentielles Wachstum



Wachstumsformen

Exponentielles Wachstum mathematisch

- Differentialgleichung

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = k \cdot f \quad mit \quad f(0) = c_0$$

- Lösung

$$f(t) = c_0 \cdot e^{k \cdot t}$$

Wachstumsformen

Wachstum eines Kaninchenbestands

- Dritte Modellannahme:
- Am Beginn sind 100 Kaninchen vorhanden.
- Die Zahl der Kaninchen nimmt in jedem Zeitabschnitt um 10% der freien Kapazität zu.

Wachstumsformen

Wachstum eines Kaninchenbestands

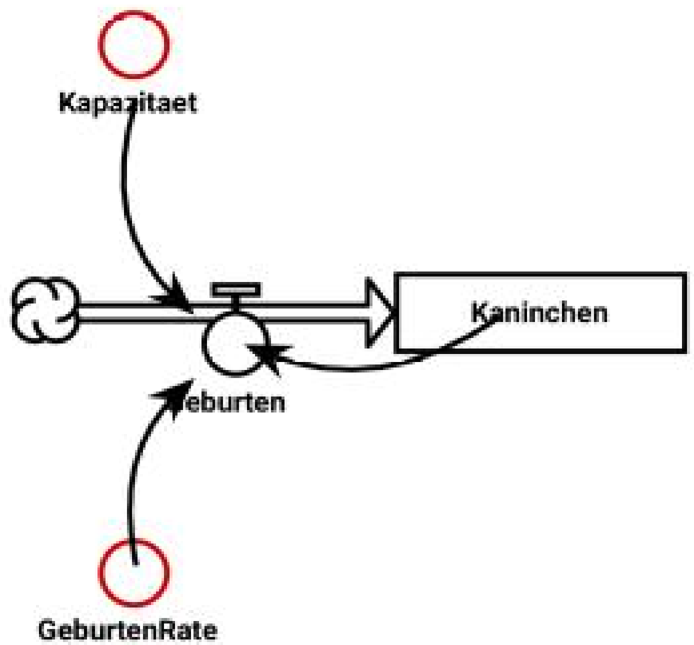
- Dritte Modellannahme

Modelldaten

```
Kaninchen = 100.0

Fluesse:
Geburten: Quelle => Kaninchen

Parameter
GeburtenRate: 0.1
Kapazitaet: 1000.0

Zwischengroesse
- - -

Wirkungen:
Kaninchen --> Geburten
GeburtenRate --> Geburten
Kapazitaet --> Geburten

Terme:
Geburten=GeburtenRate()*Kaninchen()*(Kapazitaet()-Kaninchen())/Kapazita
et()
```

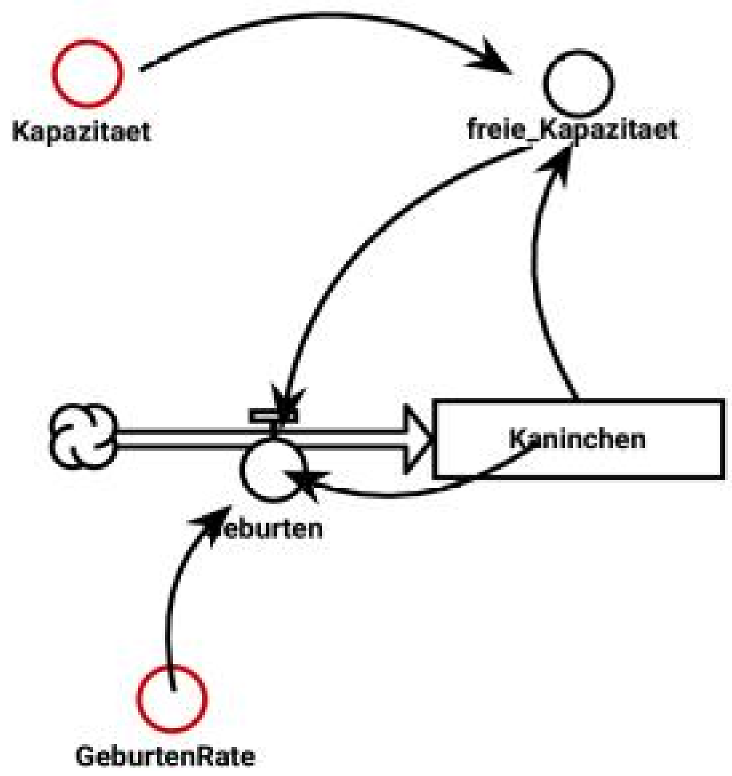
Der Teiler Kapazitaet() dient der Normierung

Modelldiagramm *(dritte Annahme)*



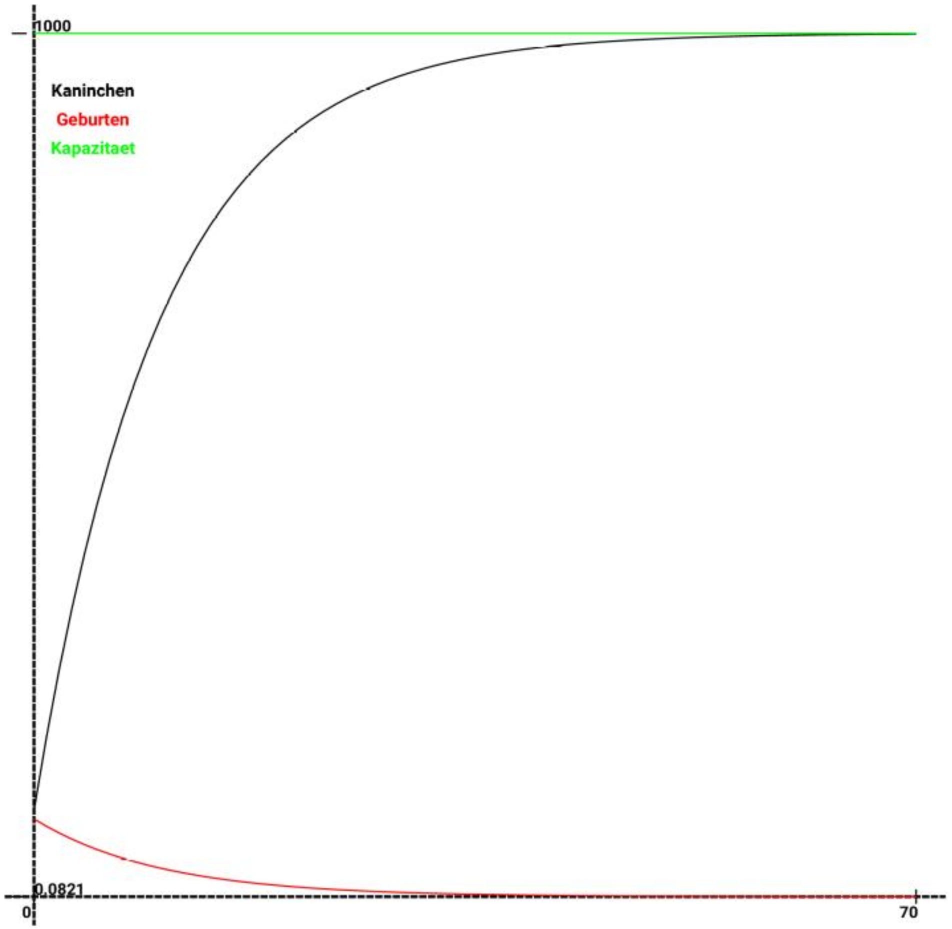
Wachstumsformen

Modelldiagramm Alternative mit Zwischengröße



Wachstumsformen

Beschränktes Wachstum *(mehr Schritte!)*



Wachstumsformen

Beschränktes Wachstum mathematisch

- Differentialgleichung

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = k \cdot (f_{max} - f) \quad mit \quad f(0) = c_0$$

- Lösung

$$f(t) = c_0 + (f_{max} - c_0) \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$$

Wachstumsformen

Wachstum eines Kaninchenbestands

- Vierte Modellannahme:
- Am Beginn sind 100 Kaninchen vorhanden.
- Die Zahl der Kaninchen nimmt in jedem Zeitabschnitt um 10% des Produktes aus dem Bestand und der freien Kapazität zu.

Wachstumsformen

Wachstum eines Kaninchenbestands

- Vierte Modellannahme

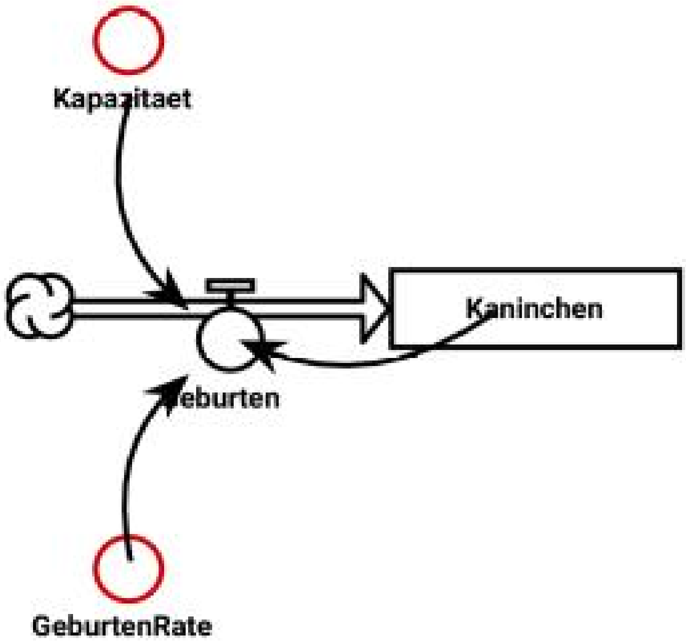
Modelldaten

```
Kaninchen = 100.0

Fluesse:
Geburten: Quelle => Kaninchen

Parameter
GeburtenRate: 0.1
Kapazitaet: 1000.0

Zwischengroesse
- - -

Wirkungen:
Kaninchen --> Geburten
GeburtenRate --> Geburten
Kapazitaet --> Geburten

Terme:
Geburten=GeburtenRate()*Kaninchen()*(Kapazitaet()-Kaninchen())/Kapazita
et()
```

Der Teiler Kapazitaet() dient der Normierung

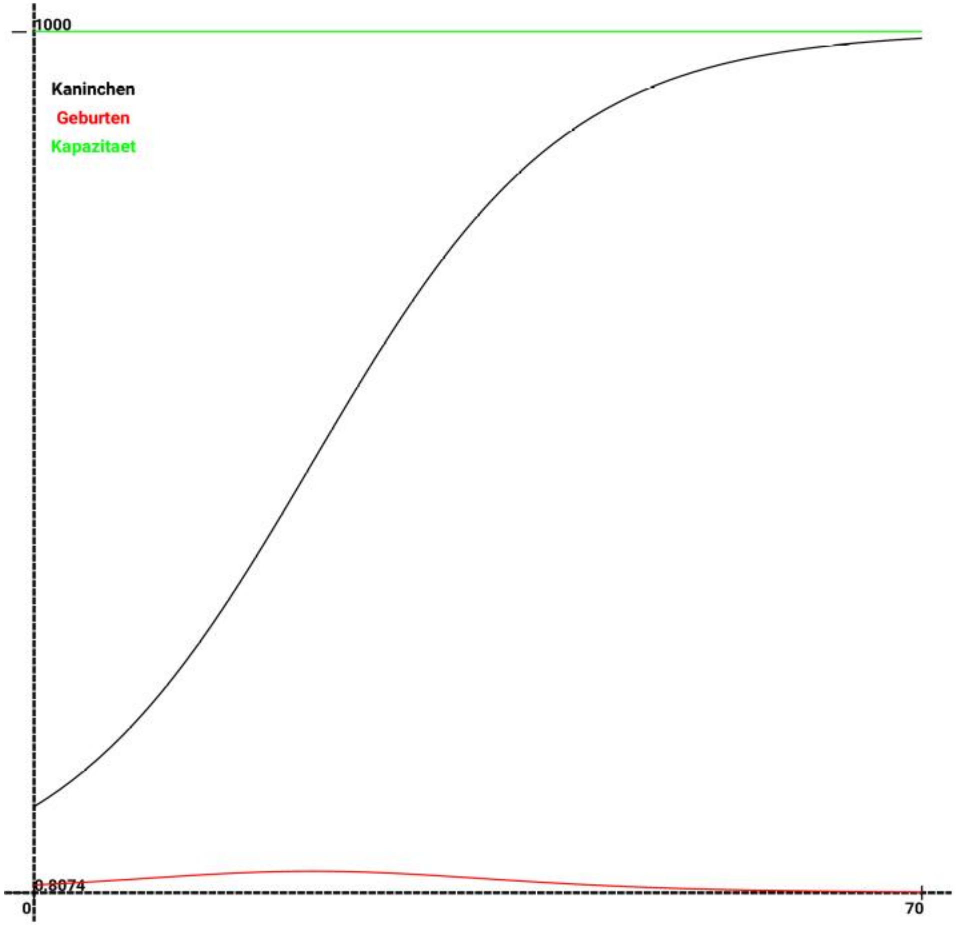
Wachstumsformen

Modelldiagramm *(wie bei beschränktem W.)*



Wachstumsformen

Logistisches Wachstum *(mehr Schritte!)*



Wachstumsformen

Logistisches Wachstum mathematisch

- Differentialgleichung

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = k \cdot f \cdot (f_{max} - f) \quad mit \quad f(0) = c_0$$

- Lösung

$$f(t) = f_{max} \cdot \frac{1}{1 + e^{-k \cdot f_{max} \cdot t} \cdot \left(\frac{f_{max}}{c_0} - 1\right)}$$